ポテンシャルの存在条件と領域の単連結性

SLA 物理部会: 木下 豊
東北大学 SLA ブログ: http://sla.cls.ihe.tohoku.ac.jp/learningtips/3948/

2020 年 8 月 25 日

1 この記事の目的

力学の授業で“力 $\boldsymbol{F}$ が保存力 (ポテンシャルを持つ力) であれば $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ である．”ということを習ったと思う．では，$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ であれば力 $\boldsymbol{F}$ はポテンシャルを持つのか？実は，その命題は領域に単連結という性質がなければ成立しない．しかし，力学の教科書にはこれについての詳細な説明が無い場合も多く，初学者が勘違いしてしまうことが多い．そこで，本稿では領域の単連結性とポテンシャルの存在条件との関係について解説する．直感的な説明を心がけているので，詳しい数学の議論が知りたい方は参考文献に挙げた本を参照してほしい．

(注) 本稿でのポテンシャルとは，何かしらの次元を持った物理量ではなく $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ の関係を満たすスカラー関数を指す.

2 ポテンシャルの存在条件

2.1 ポテンシャルの存在と線積分の関係

まず，ポテンシャルの存在と線積分の関係については以下の定理が成り立っている．

定理 1

以下の 3 つは同値である．

(A) $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ となる U 上の C^1 級スカラー場 ($\boldsymbol{F}$ のポテンシャル)ϕ が存在する．

(B) U 上のスカラー場 ϕ が存在して，U 内の点 $\forall a$ を始点 $\forall b$ を終点とする区分的 C^1 級曲線 C に対して次式が成り立つ．

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi(a) - \phi(b) \tag{2.1}$$

(C) U 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して，次式が成り立つ．

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{2.2}$$

(A) はポテンシャルの定義である．また，(B)(C) は力学でいう保存力の条件だ．つまり，力 $\boldsymbol{F}$ を始点から終点まで線積分した値が途中の経路に依らず始点と終点のみで決まるとき，力 $\boldsymbol{F}$ を保存力と呼ぶ．

$\boldsymbol{F}$ がポテンシャルを持っているとき $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ と書けており，ベクトル解析の公式 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi = 0$ より，

$$\boldsymbol{F} \text{ はポテンシャルを持つ} \Longrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

は常に成り立つ．しかし，逆については成立しないことがある．その例として以下のベクトル場について考えてみよう．

(例) ベクトル場 $\boldsymbol{F}=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$

まずは回転を計算してみる．

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

これより，このベクトル場はポテンシャルを持ちそうである．ではここで，原点中心，半径 R の円周 C に沿った一周の線積分を考えてみる．

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}&=\int_0^{2\pi} Rd\phi\frac{1}{R}\\&=2\pi\end{aligned} \tag{2.4}$$

計算結果は上記のようになり，ポテンシャルを持つ条件：定理 1(C) を満たしていない．つまり，このベクトル場はポテンシャルを持たない！

ちなみに，上記の経路を N 回周る線積分を計算すると

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=2\pi N \tag{2.5}$$

となる．

では，なぜ $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ であるにも関わらずベクトル場 $\boldsymbol{F}$ にポテンシャルが存在しないのだろう？このことについて議論するために，次節ではまず単連結領域について説明する．

2.2 単連結領域

ここでは単連結領域について簡単に説明する．本稿では弧状連結を仮定して単連結領域を定義しているものとする (杉浦『解析入門 I,II』[1, 2] などを参照)．単連結領域とは一言で言うと，任意の点を始点 (終点) とする閉曲線に対して，その経路を連続的に変形して一点に縮めることができる領域である．概念図を図 1 に示す．この右側の図のように閉曲線の中に穴があったりすると，途中で経路を連続的に変形できなくなるのでこの領域は単連結でない．

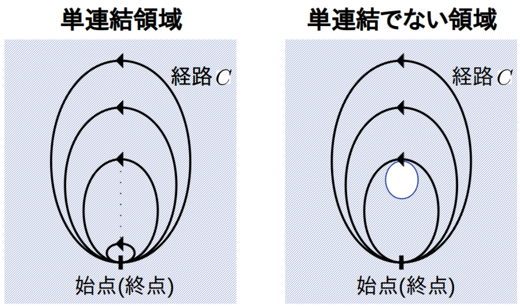

図 1: 単連結領域の概念 (領域:斜線部分)

言葉の説明だけでは分かりづらいと思うのでいくつか例を挙げておく．
(例 1)$\boldsymbol{R}^n$ は単連結領域である．
(例 2) 領域 $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$ は単連結でない．
(例 3)$\boldsymbol{R}^2$ から一点を除いた領域は単連結でない．
(例 4)$\boldsymbol{R}^3$ から一点を除いた領域は単連結である．

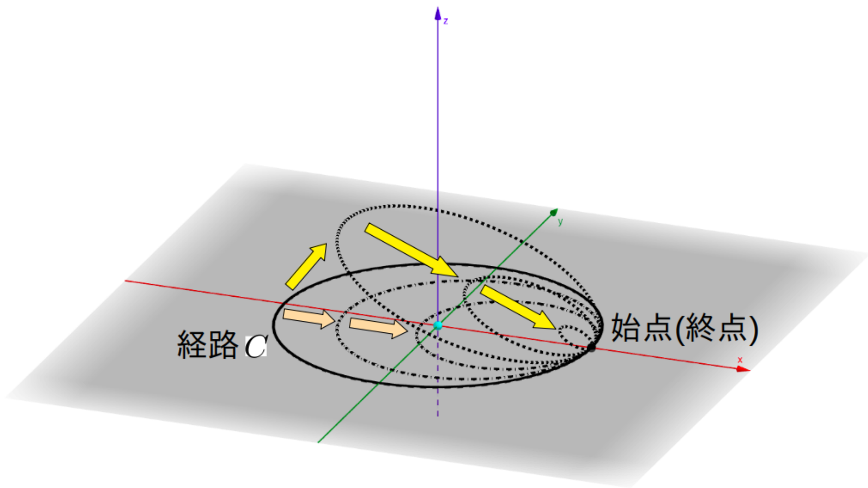

図 2: $\boldsymbol{R}^2\ (\boldsymbol{R}^3)$ から原点を除いた領域での経路 C の変形

次章にも関わってくるので，(例 3,4) について少し詳しく説明しておく．簡単のため，領域として原点が除かれている $\boldsymbol{R}^2\ (\boldsymbol{R}^3)$ を考える．経路 C は図 2 に示すように xy 平面上で特異点を囲むようにとる．まず，この経路 C を xy 平面上 $(\boldsymbol{R}^2)$ で縮めることを考える．このとき，特異点が引っかかって経路 C を連続的に一点に縮めることはできない．したがって $\boldsymbol{R}^2$ から一点を除いた領域は単連結でない．次に，経路 C を xyz 空間 $(\boldsymbol{R}^3)$ で縮めることを考える．このときは $\boldsymbol{R}^2$ の場合と違って，特異点を上手く避けて経路 C を連続的に一点に縮めることができる．それゆえ $\boldsymbol{R}^3$ から一点を除いた領域は単連結であると言える．

(ちなみに図 2 は GeoGebra(https://www.geogebra.org/) というソフトウェアで描いています．このソフトウェアは無料で，いろいろなタイプの関数，図形をプロットできるから便利です．)

2.3 ポテンシャルの存在と回転の関係

単連結領域においては，以下の定理が成り立つ．

定理 2(ポアンカレの補題)

D が $\boldsymbol{R}^3$(または $\boldsymbol{R}^2$) 内の単連結領域であるとき，D 内の C^1 級ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対し，次の (A)(B)(C) は互いに同値である．

(A) $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ となる D 上の C^2 級スカラー場 ($\boldsymbol{F}$ のポテンシャル)ϕ が存在する．

(B) D 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対し，$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ である．

(C) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.　$\Longleftarrow$ 定理 1 にココが追加された!

これを踏まえて先ほど例示したベクトル場 $\boldsymbol{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ をもう一度考える．この関数の定義域は $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 | x^2 + y^2 \neq 0\}$ と表すことができるが，この領域は前節の (例 3) で述べたよう

に単連結でない(原点で定義されていない). したがって定理2は適用できないので, ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ は $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ にも関わらずポテンシャルを持たなくても良いのである.

3　ニュートンポテンシャルについて

ニュートンポテンシャルは

$$U(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm}{r} \tag{3.1}$$

で表されるポテンシャルだ. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{3.2}$$

である. もちろん $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ となる. ここでは一旦, このベクトル場にポテンシャルが存在することは忘れて $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ の結果からベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対するポテンシャルの存在を証明できるか考えてみよう. これは3次元の場合と2次元の場合で話が異なる. なぜなら, 前章で述べた通り

- $\boldsymbol{R}^3$ から一点を除いた領域は単連結である.
- $\boldsymbol{R}^2$ から一点を除いた領域は単連結ではない.

という事情があるからである.

3次元空間の場合, 定義域は $\boldsymbol{R}^3$ から一点(原点)を除いた領域なので, これは単連結領域であり $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ の結果からポテンシャルの存在を証明することができる.

2次元空間の場合, 定義域は $\boldsymbol{R}^2$ から一点(原点)を除いた領域なので, これは単連結でない. したがって, $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ の結果からポテンシャルの存在を証明することはできない. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が偶然ポテンシャルを持っていたから $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ となっただけである.

このように, ベクトル場を定義する空間の次元によって空間の単連結性が変わり, 定理2(ポアンカレの補題)が使えなくなることがあるので注意が必要だ.

4　まとめ

以上の議論より, $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ の結果からベクトル場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルを持つことを主張する際は, ベクトル場の定義域の単連結性についてチェックしなければならないことが分かった.

物理では単連結性が問題にならないことが多いので, 普段から単連結性について考えることは無いと思う. しかし, 単連結性といった空間の幾何学的性質が重要になってくる物理現象もあるので, この知識も頭の片隅に入れておくと良いかも知れない.

参考文献

[1] 杉浦光夫『解析入門 I』東京大学出版会, 1980年

[2] 杉浦光夫『解析入門 II』東京大学出版会, 1985年